ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ТЕМА

Геометрия

9 класс

Тестовые задания частей 1 и 2

ВПЕРВЫЕ!

АВС — Азбука ГИА

ABC — Азбука ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЯ

Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
С95

Сычёва, Г.В.
С95 Математика : Геометрия / Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев. — М.: Астрель, 2012. — 31, [1] с. (ABC — Азбука ГИА).
ISBN 978-5-271-39072-2 (ООО «Издательство Астрель»)

Настоящее пособие предназначено для подготовки девятиклассников к успешной сдаче ГИА. Приведен необходимый теоретический материал и задания для самостоятельного решения. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных школ, а также учителей.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Тесты

Сычёва Галина Владимировна, Гусева Наталья Борисовна
Гусев Владимир Алексеевич

МАТЕМАТИКА

Геометрия

Редакция «*Образовательные проекты*»

Отв. редактор *Г.Н. Хромова*. Худ. редактор *Т.Н. Войткевич*
Тех. редактор *А.Л. Шелудченко*. Корректор *И.Н. Мокина*
Дизайн обложки *Н.А. Шармай*
Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»

Подписано в печать 27.10.2011. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Усл. печ. л. 1,68. Тираж экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная
Сертификат соответствия № РОСС RU.AE51.H15301 от 04.05.2011

ООО «Издательство Астрель» 129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а
Издаётся при техническом участии ООО «Издательство АСТ»

ISBN 978-5-271-39072-2 (ООО «Издательство Астрель»)

Содержание

Предисловие

Пособие рассчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку выпускников 9-х классов к государственной итоговой аттестации (ГИА) по математике в новой форме.

Каждый вариант экзаменационной работы состоит из 2-х частей и включает 23 задания. Шесть из них посвящены геометрии. В первой части — это задания 6, 8, 14 и 15, а во второй — 20 и 23.

В этих заданиях проверяются умения решать разнообразные геометрические задачи, а также умение работать с векторами на плоскости.

Ответы на задания первой части требуется записать в виде числа или выбрать правильные ответы из предложенных. В заданиях второй части необходимо дать полное решение или провести доказательство.

В учебном пособии рассмотрены все темы по геометрии, которые проверяются на экзамене. В каждой даётся краткое изложение теоретического материала и примеры решения типовых задач, соответствующих формату ГИА. Для тренинга и самопроверки приведено большое количество заданий различного уровня сложности. В конце книги к ним даны ответы.

УГЛОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ПЛОСКИХ ФИГУРАХ

При пересечении двух прямых образуется четыре пары смежных и две пары вертикальных углов (рис. 1): $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 4$ и $\angle 1$ — смежные углы; $\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные углы. Сумма смежных углов равна $180°$. Вертикальные углы равны между собой.

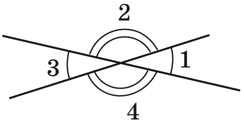


Рис. 1

Задача 1. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, на $70°$ больше другого. Найдите эти углы.

Решение. Искомые углы не могут быть вертикальными, так как они не являются равными. Значит, углы смежные. Обозначим градусную меру меньшего из углов x, тогда градусная мера второго угла равна $x + 70$. По свойству смежных углов имеем уравнение $x + x + 70 = 180$, $x = 55$. Искомые углы $55°$ и $125°$. *Ответ:* $125°$ и $55°$.

При пересечении двух прямых третьей прямой (секущей) образуются пары углов накрест лежащих, соответственных и односторонних (рис. 2). $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — накрест лежащие; $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$ — соответственные углы; $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ — односторонние углы.

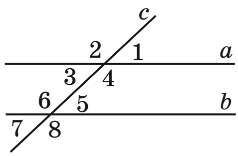


Рис. 2

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то

а) накрест лежащие углы равны;

б) соответственные углы равны;

в) сумма односторонних углов равна $180°$.

Наоборот, если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов рана $180°$, то прямые параллельны.

Задача 2. Разность двух углов, полученных при пересечении параллельных прямых секущей, равна $60°$. Найдите градусную меру каждого из восьми полученных углов.

Решение. Углы, разность которых $60°$, могут быть лишь односторонними. Обозначим их градусные меры через x и y. По условию $x - y = 60$, а по свойству односторонних углов $x + y = 180$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} x - y = 60, \\ x + y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 120, \\ y = 60. \end{cases}$

Итак, $\angle 4 = 120^\circ$, $\angle 5 = 60^\circ$ (рис. 2), тогда $\angle 2 = \angle 6 = 120^\circ$, $\angle 3 = \angle 1 = \angle 7 = 60^\circ$ (по свойству углов, полученных при пересечении параллельных прямых секущей). *Ответ:* 60°, 120°, 60°, 120°, 60°, 120°, 60°, 120°.

Треугольники

Сумма углов треугольника равна 180°. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (и наоборот). В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с этим внешним.

Задача 3. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B и в 3 раза меньше угла C. Найдите градусную меру угла B.

Решение. Пусть градусная мера угла B равна x, тогда $\angle A = 2x$, $\angle C = 6x$. Сумма углов треугольника равна 180°. Решаем уравнение $x + 2x + 6x = 180$; $x = 20$. *Ответ:* 20°.

Задача 4. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен 50°.

Решение. Если угол при вершине равнобедренного треугольника равен 50°, то каждый из углов при основании равен $\dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$. Если угол при основании равнобедренного треугольника равен 50°, то угол при вершине равен $180^0 - 50^\circ \cdot 2 = 80^\circ$. *Ответ:* 50°, 65°, 65° или 80°, 50°, 50°.

Задача 5. В треугольнике MNP внешний угол при вершине P в 5 раз больше угла M, а угол N на 60° больше угла M. Найдите градусную меру угла M (рис. 3).

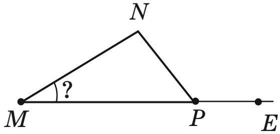


Рис. 3

Решение. Пусть градусная мера угла M равна x, тогда по условию $\angle N = x + 60$, $\angle NPE = 5x$. По свойству внешнего угла треугольника имеем уравнение $5x = x + x + 60$, $x = 20$. *Ответ:* 20°.

Четырёхугольники

Сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

В параллелограмме противоположные углы равны, а сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

В равнобедренной трапеции углы при основании равны. Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°.

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, в любом выпуклом многоугольнике равна 360°.

Задача 6. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 4) угол D равен 140°, BH — высота параллелограмма. Найдите угол ABH.

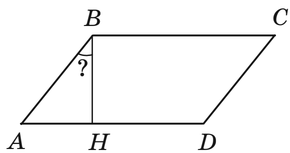


Рис. 4

Решение.

1. По свойству углов параллелограмма $\angle A + \angle D = 180^\circ$, $\angle A = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

2. По свойству острых углов прямоугольного треугольника $\angle ABH = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. *Ответ:* 50°.

Задача 7. В равнобедренной трапеции один из углов на 42° меньше другого. Найдите больший угол этой трапеции.

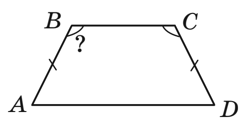


Рис. 5

Решение (рис. 5). Пусть $\angle A = \angle D = x$. Тогда $\angle B = \angle C = x + 42$. По свойству углов трапеции $\angle A + \angle B = 180^\circ$, т.е. $x + x + 42 = 180$, $x = 69$, $\angle A = \angle D = 69^\circ$, $\angle B = \angle C = 111^\circ$. *Ответ:* 111°.

Задача 8. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его угол равен 120°?

Решение. Сумма углов правильного n-угольника равна $180^\circ(n - 2)$, а по условию она равна $120^\circ n$. Имеем уравнение $180(n - 2) = 120n$; $180n - 360 = 120n$; $60n = 360$; $n = 6$. *Ответ:* 6.

Окружность

Величина центрального угла окружности равна градусной мере дуги, на которую он опирается. Величина вписанного угла окружности равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°. Величина угла, вершина которого лежит внутри круга, равна полусумме градусных мер двух дуг, заключенных между его сторонами и продолжениями этих сторон.

Величина угла, образованного касательной и хордой, проведённой в точку касания, равна половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами. Величина угла, образованного касательной и секущей, проведёнными из одной точки к окружности, измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами.

Величина угла, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают окружность, равна полуразности градусных мер дуг, заключённых между его сторонами. Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

Задача 9. Через точку, лежащую вне круга, проведены две секущие, образующие угол в 40°. Меньшая дуга окружности, заключённая между сторонами угла, содержит 30°. Найдите градусную меру большей дуги.

Решение. $40^\circ = \dfrac{x - 30^\circ}{2}$; $x = 110^\circ$. *Ответ:* 110°.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите смежные углы, если один из них в три раза больше другого. В ответе укажите меньший из углов.

2. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении прямых AB и CD, равна 52°. Найдите разность этих углов.

3. Найдите углы, полученные при пересечении двух прямых, если сумма трёх из этих углов равна 220°. В ответе укажите градусную меру наименьшего из углов.

4. Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.

5. В треугольнике ABC внешний угол при вершине C в четыре раза больше угла A. Угол B на 30° больше угла A. Найдите градусную меру угла A.

6. В равностороннем треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и BK, которые пересекаются в точке O. Найдите угол AOB.

7. В треугольнике ABC из вершин A и C проведены высоты, которые пересекаются в точке H. Найдите угол B данного треугольника, если $\angle AHC = 130^\circ$.

8. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его угол равен 108°?

9. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его внешний угол равен 36°?

10. На рис. 6 а, б определите градусную меру угла BAE, если а) $AB = AC$, $\angle B = 35^\circ$; б) $AC = BC$, $\angle C = 50^\circ$.

Рис. 6

11. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 15° и 30°. Найдите наибольший угол параллелограмма.

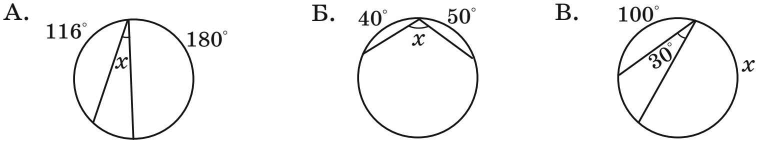
12. Градусные меры двух углов параллелограмма относятся, как 2 : 3. Найдите наименьший из этих углов.

13. В трапеции боковые стороны равны меньшему основанию, а диагональ составляет с основанием угол 30°. Найдите тупой угол трапеции.

14. В угол ABC вписана окружность; точки касания делят окружность на две части, отношения которых равно 5 : 4. Определите градусную меру угла ABC.

15. Через точку M окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

16. По данным рисунка 7 найдите x. Ответы впишите в таблицу.



1) 135° 2) 200° 3) 32°

Рис. 7

Ответ:

А	Б	В

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПЛОСКИХ ФИГУРАХ

Треугольники

Сумма длин трёх сторон треугольника называется *периметром* треугольника. Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, но больше их разности:

$b - c < a < b + c$; $a - c < b < a + c$; $a - b < c < a + b$.

Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника*.

Против большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Против равных углов в треугольнике лежат равные стороны (и наоборот).

Задача 1. В равнобедренном треугольнике две стороны имеют длины 10 см и 4 см соответственно. Найдите длину третьей стороны треугольника.

Решение. В условии даны неравные стороны треугольника. Значит, одна из них должна быть основанием, а другая — боковой стороной.

Если основание треугольника равно 10 см, то каждая боковая сторона 4 см. Но такого треугольника не существует, так как $10 > 4 + 4$ и «неравенство треугольника» не выполняется. Если основание равно 4 см, то боковые стороны 10 см и 10 см. Такой треугольник существует так как $10 < 10 + 4$. *Ответ:* 10 см.

Основные линии в треугольнике и их свойства

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Три высоты треугольника (или прямые, их содержащие) пересекаются в одной точке, которая называется *ортоцентром* треугольника. В остроугольном треугольнике ортоцентр расположен внутри треугольника, в тупоугольном — вне треугольника, в прямоугольном — совпадает с вершиной прямого угла.

Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC делит противоположную сторону BC на две части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (рис. 8 а).

Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в такой точке D, что $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (рис. 8 б).

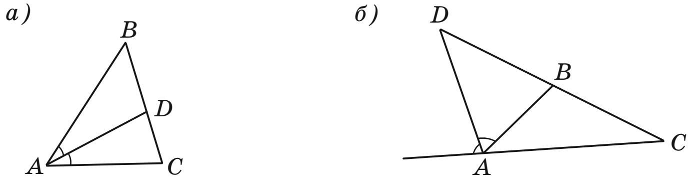


Рис. 8

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в соотношении 2 : 1, считая от вершины.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой. Наоборот, если медиана треугольника является биссектрисой (или высотой), то треугольник равнобедренный.

В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Наоборот, если медиана, проведённая к стороне треугольника, равна половине этой стороны, то треугольник прямоугольный.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

В остроугольном треугольнике центр описанной окружности находится внутри треугольника, в тупоугольном — вне треугольника, в прямоугольном — в середине гипотенузы.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна её половине.

Задача 2. На рис. 9 $OE = OD$, $OK \perp DE$, $DC = 15$ см. Найдите длину отрезка CE.

Решение. 1.В равнобедренном треугольнике DOE OK — высота (по условию), а значит, и медиана (по свойству равнобедренного треугольника) т.е. $DK = KE$.

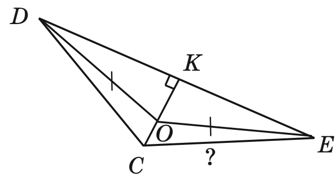


Рис. 9

2. В треугольнике DCE отрезок CK является высотой (по условию) и медианой (по доказанному). Значит, треугольник DCE — равнобедренный с основанием DE; $CE = DC = 15$. *Ответ:* 15 см.

Задача 3. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки, равные 3 и 6. Найдите высоту треугольника, проведённую к гипотенузе.

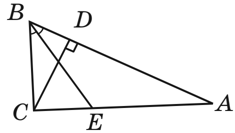


Рис. 10

Решение (рис. 10). 1. Рассмотрим треугольник ABC. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{AE}$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Если катет BC равен половине гипотенузы AB, то $\angle A = 30^\circ$.

2. Рассмотрим треугольник ADC, $\angle D = 90^\circ$ (CD — высота треугольника ABC), $\angle A = 30^\circ$. Значит, $CD = \frac{1}{2}AC$ (по свойству катета, лежащего против угла 30°); $AC = 3 + 6 = 9$, $CD = \frac{9}{2} = 4{,}5$. *Ответ:* 4,5.

Равные треугольники

Два треугольника называются равными, если при наложении они совмещаются. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и обратно: против равных углов лежат равные стороны.

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

2. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

3. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

4. Если катет и прилежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого, то такие треугольники равны.

5. Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Задача 4. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AE и CD. Найдите длину отрезка BD, если $BE = 17$ см.

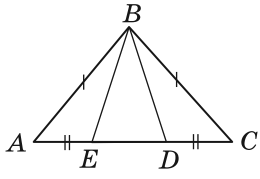


Рис. 11

Решение (рис.11). 1. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$ (боковые стороны) и $\angle A = \angle C$ (углы при основании).

2. $\triangle ABE = \triangle CBD$ по двум сторонам ($AB = BC$, $AE = DC$) и углу между ними ($\angle A = \angle C$). Значит, $BE = BD = 17$ см. *Ответ:* 17 см.

Синус, косинус, тангенс угла

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C гипотенуза $AB = c$, катеты $BC = a$, $AC = b$ (рис. 12). *Синусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\sin B = \dfrac{b}{c}$.

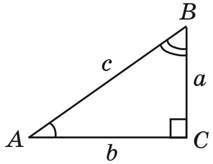


Рис. 12

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos A = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$. $\sin A = \cos B$, $\cos A = \sin B$, т.е. $\cos(90^\circ - A) = \sin A$, $\sin(90^\circ - A) = \cos A$.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему: $\mathrm{tg} A = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg} B = \frac{b}{a}$. Очевидно, что $\mathrm{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

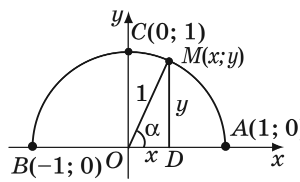


Рис. 13

Введём прямоугольную систему координат xoy и построим единичную (т.е. $R = 1$) полуокружность с центром в начале координат (рис. 13). Обозначим буквой α угол между лучом OM и положительной полуосью абсцисс, $0^0 \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ (M — точка пересечения луча с полуокружностью). Для любого угла α из промежутка $[0^\circ; 180^\circ]$ синусом угла α называется ордината y точки M, косинусом угла α — абсцисса x точки M, а тангенсом угла α ($\alpha \neq 90^\circ$) — отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$: $\sin\alpha = y_M$, $\cos\alpha = x_M$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin A}{\cos A}$; $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, $\mathrm{tg} 90^\circ$ не существует; $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Таблица значений синуса, косинуса и тангенса некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущес.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема синусов. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Замечание. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R — радиус окружности, описанной около треугольника).

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

В прямоугольном треугольнике ($\angle C = 90°$):

— квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора): $c^2 = b^2 + a^2$ (частный случай теоремы косинусов, когда $\angle C = 90°$);

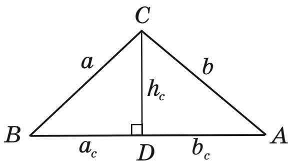


Рис. 14

— катет равен среднему пропорциональному между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$;

— высота, проведённая к гипотенузе, равна среднему пропорциональному между проекциями катетов на гипотенузу: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$ (рис. 14).

Задача 5. Точка на гипотенузе прямоугольного треугольника, равноудалённая от катетов, делит гипотенузу на отрезки 10 см и 30 см. Найдите больший катет треугольника.

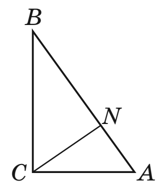


Рис. 15

Решение (рис. 15). 1.Точка N, равноудалённая от катетов, лежит на биссектрисе CN. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{CA}{CB} = \frac{AN}{BN}$; $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{3}$.

2. Пусть $CA = x$, тогда $CB = 3x$; по условию $AB = 10 + 30 = 40$. По теореме Пифагора $x^2 + (3x)^2 = 40^2$; $10x^2 = 1600$; $x^2 = 160$; $x = 4\sqrt{10}$; $AC = 4\sqrt{10}$, $BC = 12\sqrt{10}$. *Ответ:* $12\sqrt{10}$ см.

Задача 6. Стороны треугольника равна 6 см и 3 см, а угол между ними $60°$. Найдите отрезки, на которые биссектриса данного угла делит противоположную сторону треугольника.

Решение (рис. 16). 1. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$.

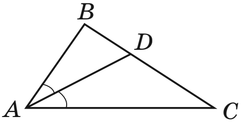


Рис. 16

2. Пусть $BD = x$, тогда $DC = 2x$, $BC = 3x$. По теореме косинусов в треугольнике ABC $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$, $9x^2 = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60°$, $9x^2 = 27$; $x^2 = 3$, $x = \sqrt{3}$, $2x = 2\sqrt{3}$. *Ответ:* $\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{3}$ см.

Задача 7. В треугольнике MPE угол M равен $45°$, $PE = 8$ см. На стороне PM отложен отрезок PC, равный 6 см. Найдите длину стороны ME, если $CE = 2\sqrt{13}$ см.

Решение (рис. 17). 1. Рассматриваем $\triangle CPE$. По теореме косинусов $CE^2 = CP^2 + PE^2 - 2 \cdot CP \cdot PE \cdot \cos P$, $\cos P = \frac{CP^2 + PE^2 - CE^2}{2 \cdot CP \cdot PE}$, $\cos P = \frac{36 + 64 - 52}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1}{2}$; $\angle P = 60°$.

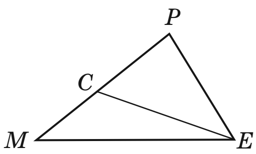


Рис. 17

2. Рассматриваем $\triangle MPE$. По теореме синусов $\frac{ME}{\sin P} = \frac{PE}{\sin M}$; $\frac{ME}{\sin 60°} = \frac{PE}{\sin 45°}$; $ME = \frac{\sqrt{3} \cdot 8 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$ см.

Подобие треугольников

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника. *Сходственными* называются стороны, лежащие против соответственно равных углов в подобных треугольниках. Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$, k — коэффициент подобия треугольников.

Замечание. Равные треугольники можно рассматривать как частный случай подобных треугольников с коэффициентом подобия $k = 1$.

Отношение периметров двух подобных треугольников равно отношению сходственных сторон, т.е. равно коэффициенту подобия: $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$.

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$.

Признаки подобия треугольников

I. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

II. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

III. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Задача 8. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершинах равны. Периметр первого треугольника равен 128 см. Определите его стороны, если основание и боковая сторона второго треугольника относятся как 2 : 3.

Решение. Если в равнобедренных треугольниках равны углы при вершинах, то равны и углы при основаниях, т.е. такие треугольники подобны (по двум углам). Значит, основание и боковая сторона первого треугольника относятся как 2 : 3, и длины его сторон можно обозначить как $2k$, $3k$, $3k$, а его периметр $8k$. По условию $8k = 128$, $k = 16$. Стороны первого треугольника имеют длины 32 см, 48 см, 48 см. *Ответ:* 32 см, 48 см, 48 см.

Задача 9. Из вершины угла C треугольника ABC проведён отрезок CE так, что $\angle ABC = \angle ACE$. Определите отрезок AE, если $AB = 25$ см, $AC = 20$ см.

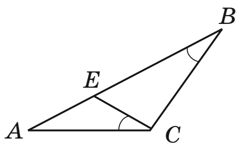


Рис. 18

Решение (рис. 18). $\triangle ABC \sim \triangle ACE$ (по двум углам: $\angle B = \angle ACE$, $\angle A$ — общий), тогда $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AE}$, $AE = \dfrac{AC^2}{AB}$, $AE = \dfrac{400}{25} = 16$. *Ответ:* 16 см.

Задача 10. Периметр равнобедренного ($AB = BC$) треугольника ABC равен 52 см. Через середину его высоты BB_1 проведена прямая MN, параллельная боковой стороне AB. Найдите периметр образовавшегося треугольника MCN.

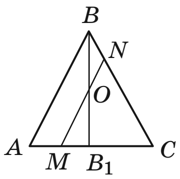


Рис. 19

Решение (рис. 19). 1. $\triangle AB_1B \sim \triangle MB_1O$ (по двум углам), тогда $\frac{AB_1}{MB_1} = \frac{BB_1}{OB_1} = \frac{2}{1}$. Итак, $AM = MB_1 = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{4}AC$, $\frac{MC}{AC} = \frac{3}{4}$.

2. $\triangle MCN \sim \triangle ACB$ (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = \frac{MC}{AC} = \frac{3}{4}$. Тогда $\frac{P_{\Delta MCN}}{P_{\Delta ACB}} = \frac{3}{4}$, $P_{\triangle MCN} = \frac{3}{4} \cdot P_{\triangle ABC}$, $P_{\triangle MCN} = \frac{3}{4} \cdot 52 = 39$. *Ответ:* 39 см.

Замечание. Можно было бы использовать тот факт, что MO — средняя линия треугольника AB_1B и поэтому $AM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{4}AC$.

Задания для самостоятельного решения

1. В равнобедренном треугольнике две стороны имеют длины 9 см и 4 см. Найдите длину третьей стороны треугольника.

2. На рис. 20 $AB = 23$ см, $\angle 1 = \angle 2$. Найдите длину отрезка BC.

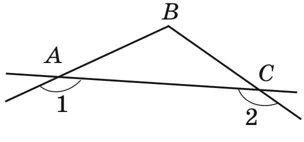


Рис. 20

3. Дан равнобедренный треугольник MNP с основанием MN; $\angle M = 60^\circ$, $MP = 45$ см. Найдите сторону MN.

4. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника образует с его стороной угол 60°. Определите высоту треугольника, проведённую к основанию, если его боковая сторона равна 30 см.

5. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, сумма гипотенузы и меньшего катета равна 39 см. Найдите длину гипотенузы.

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 38 см. Его основание на 1 см меньше боковой стороны. Найдите боковую сторону треугольника.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 52 см; его боковая сторона в 6 раз больше основания. Найдите основание треугольника.

8. Укажите верное продолжение следующего утверждения: если треугольник равнобедренный, то:

1) его медиана является высотой и биссектрисой;

2) углы при основании треугольника равны;

3) биссектриса треугольника делит противоположную сторону пополам.

9. В треугольнике ABC проведена высота CD. Найдите градусную меру угла ACB, если $AD = DB$, $\angle CAB = 38^\circ$.

10. На рис. 21 AD и BF — биссектрисы треугольника ABC; O — точка пересечения биссектрис, $\angle ABO = 32^\circ$, $\angle OAF = 32^\circ$, $BO = 9$ см. Найдите длину отрезка AO.

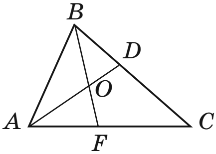


Рис. 21

11. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и CB отложены равные между собой отрезки AM и CN. Точка K — середина стороны AC. Найдите длину отрезка KN, если $KM = 21$ см.

12. В треугольнике ADC проведена медиана DM. На продолжении медианы за точку M отложен отрезок MD_1, равный DM. Найдите длину стороны DC, если $AD_1 = 14$ см.

13. Укажите номера верных утверждений.

1. Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если три угла одного треугольника соответственно равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

4. Если два катета одного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.

14. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Найдите градусную меру угла OBD, если $\angle ACO = 80°$, $\angle CAO = 60°$.

15. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 23 см. Из точки на основании этого треугольника проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

16. Найдите сторону DK изображённой на рис. 22 фигуры.

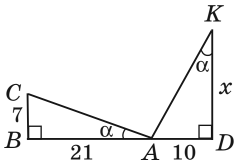


Рис. 22

17. Стороны треугольника имеют длину 12 см, 15 см, 24 см. Определите меньшую сторону ему подобного треугольника, если его большая сторона равна 72 см.

18. Стороны двух равносторонних треугольников равны 5 см и 25 см. Найдите отношение площадей этих треугольников.

19. Укажите номера верных утверждений.

1. Два равнобедренных треугольника подобны, если боковые стороны одного треугольника пропорциональны боковым сторонам другого треугольника.
2. Два равнобедренных треугольника подобны, если их углы при вершине равны между собой.
3. Любые два равносторонних треугольника подобны.
4. Два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют равные гипотенузы.

20. В треугольнике ABC угол A равен $30°$, угол C равен 45^0. Найдите отношение сторон $\frac{AB}{BC}$.

21. В треугольнике две стороны имеют длину 2 дм и 3 дм, угол между ними — $60°$. Найдите третью сторону треугольника.

22. В треугольнике одна из сторон равна 15 см, противоположный ей угол — $30°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

23. Найдите значение выражения:

а) $\sin 150° + \cos 60° - \operatorname{tg} 45°$;

б) $\cos 120° + \sin 30° + \operatorname{tg} 60°$;

в) $\cos^2 30° - \sin^2 30° + \operatorname{tg} 135°$.

Четырёхугольники

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Свойства параллелограмма

1. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
3. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
4. Диагонали прямоугольника равны.
5. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

Задача 1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M так, что $BM = BA$. Найдите угол BCD, если угол MAD равен $40°$.

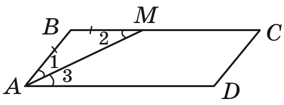


Рис. 23

Решение (рис. 23). В равнобедренном треугольнике ABM ($AB = BM$) равны углы при основании, т.е. $\angle 2 = \angle 1$. Но $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AM. Значит, $\angle 1 = \angle 3$ и AM — биссектриса угла A. Значит, $\angle A = 2\angle MAD = 80°$; $\angle BAD = \angle C = 80°$. *Ответ:* $80°$.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы AM и DN, разбившие сторону BC на три равных отрезка. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 56 см.

Решение. 1. Отрезки биссектрис AM и DN могут не иметь общих точек (рис. 24 а). Обозначим $BM = MN = NC = x$. Так как $\angle 1 = \angle 2$ (AM — биссектриса) и $\angle 3 = \angle 2$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$, секущей AM), то $\angle 1 = \angle 3$, т.е. треугольник ABM — равнобедренный и $AB = x$. Периметр $ABCD$ равен $8x$; $8x = 56$, $x = 7$; $AB = 7$ см.

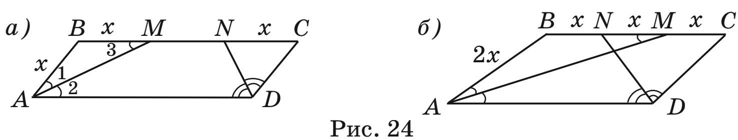


Рис. 24

2. Если отрезки AM и DN пересекаются, то обозначаем $BN = NM = MC = x$. Тогда $AB = 2x$; $P_{ABCD} = 10x$; $10x = 56$; $x = 5{,}6$; $AB = 11{,}2$ см. *Ответ:* 7 см или 11,2 см.

Задача 3. В прямоугольнике диагональ в два раза больше меньшей стороны. Найдите тупой угол между диагоналями прямоугольника.

Решение (рис. 25). 1. Рассмотрим треугольник ADC, $\angle D = 90°$; по условию катет CD равен половине гипотенузы AC. Значит, $\angle CAD = 30°$.

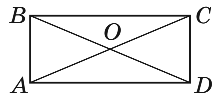


Рис. 25

2. В равнобедренном треугольнике AOD $AO = OD$ (половины равных диагоналей), $\angle OAD = \angle ADO = 30°$; $\angle AOD = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. *Ответ:* 120°.

Задача 4. Большая диагональ ромба равна 20 см, а один из его углов равен 120°. Найдите высоту ромба.

Решение (рис. 26). Рассмотрим прямоугольный треугольник AOE: $\angle AEO = 90°$; $OE = \frac{h}{2}$; $AO = \frac{1}{2}AC = 10$; $\angle OAE = 30°$ (так как $\angle BAD = 180° - 120° = 60°$, AC — биссектриса угла A). $OE = \frac{1}{2}AO$ (катет, лежащий против угла 30°); $OE = \frac{1}{2} \times 10 = 5$; $h = 2OE = 10$. *Ответ:* 10 см.

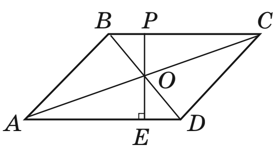


Рис. 26

Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Трапеция называется *равнобедренной*, если её боковые стороны равны. Трапеция называется *прямоугольной*, если один из её углов прямой.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$

1) диагонали равны ($AC = BD$);

2) проекции боковых сторон на большее основание равны полуразности оснований $\left(AB_1 = DC_1 = \frac{a-b}{2}\right)$;

3) проекция диагонали на большее основание равна полусумме оснований ($AC_1 = DB_1 = \frac{a+b}{2}$) (рис. 27).

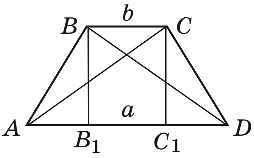


Рис. 27

Задача 5. Основания равнобедренной трапеции равны 30 см и 12 см, а один из углов 45°. Найдите боковую сторону трапеции.

Решение (рис. 27). Если $AD = 30$, $BC = 12$, то $AB_1 = \frac{30-12}{2} = 9$. В треугольнике ABB_1 $\angle B_1 = 90°$, $AB_1 = 9$, $\angle A = 45°$, тогда $AB = \frac{9}{\cos 45°} = 9\sqrt{2}$, $CD = AB$. *Ответ:* $9\sqrt{2}$.

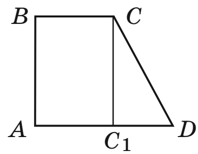


Рис. 28

Задача 6. Основания прямоугольной трапеции 20 см и 14 см, а один из углов 60°. Найдите большую боковую сторону трапеции.

Решение (рис. 28). Рассмотрим треугольник CC_1D. $\angle C_1 = 90°$, $\angle D = 60°$, тогда $\angle C_1CD = 90° - 60° = 30°$, $C_1D = 20 - 14 = 6$. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы: $CD = 2 \cdot 6 = 12$. *Ответ:* 12 см.

Задания для самостоятельного решения

1. Периметр параллелограмма равен 60 см. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если она короче другой стороны на 2 см.

2. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 64 см, $\angle A = 30°$, перпендикуляр BE к стороне AD равен 6 см. Найдите большую сторону параллелограмма.

3. Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке N. Найдите периметр параллелограмма, если $AN = 10$ см, $ND = 8$ см.

4. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах AD и BC отрезки $AE = 15$ см и $BM = 6$ см. Найдите сторону AD.

5. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 35 см. Найдите длину диагонали BD, если периметр треугольника ABD равен 27,5 см.

6. Укажите номера неверных утверждений.

1. Если в четырёхугольнике диагонали равны, то этот четырёхугольник является прямоугольником.

2. Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.

3. Если диагонали прямоугольника являются биссектрисами его углов, то этот прямоугольник — квадрат.

7. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC в два раза больше стороны CD. Найдите величину острого угла между диагоналями прямоугольника.

8. Большая диагональ ромба равна 16 см, а один из его углов равен 60°. Найдите высоту ромба.

9. В ромбе высота, проведённая из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Найдите острый угол ромба.

10. Основания прямоугольной трапеции 10 см и 6 см, а один из углов равен 60°. Найдите большую боковую сторону трапеции.

11. Найдите периметр равнобедренной трапеции, если её острый угол равен 60°, а основания равны 30 см и 20 см.

12. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 180 см, а основания относятся как 2 : 3. Найдите среднюю линию трапеции.

13. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

14. Продолжите предложения А, Б, В, использовав тексты 1, 2, 3, 4, так, чтобы получилось верное утверждение. Ответ занесите в таблицу.

А. Если в четырёхугольнике диагонали равны, то этот четырёхугольник является ...

Б. Если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является...

В. Если в параллелограмме все стороны равны, то этот параллелограмм является ...

1) ромбом
2) квадратом
3) трапецией
4) невозможно определить

А	Б	В

15. Укажите номера неверных утверждений.

1. Любой прямоугольник является параллелограммом.
2. Любой квадрат является ромбом.
3. В параллелограмме все высоты равны между собой.
4. В любой трапеции диагонали равны между собой.

16. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 6$ см, $CD = 4$ см, одна из боковых сторон равна 5 см. На сколько нужно её продолжить до пересечения с продолжением другой боковой стороны?

17. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 48$ см, $BC = 24$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите отрезки, на которые точка O делит диагональ AC, если длина AC равна 72 см.

Окружность

Длина окружности равна $2\pi R$, где R — радиус окружности.

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам. Наоборот, диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.

Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.

Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Перпендикуляр, проведённый из точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

Задача 1. Через точку B вне круга, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках C_1, C_2, а другая в точках D_1, D_2. Найдите BD_1, если $BD_2 = 10$ см, $BC_1 = 6$ см, $BC_2 = 15$ см.

Решение (рис. 29). Произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведённой к окружности из той же точки, т.е. является числом постоянным для данной точки. Следовательно, $BC_2 \cdot BC_1 = BD_2 \cdot BD_1$, $15 \cdot 6 = 10 \cdot BD_1$, $BD_1 = 9$. *Ответ:* 9 см.

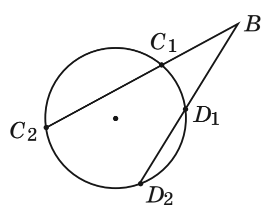


Рис. 29

Во всякий треугольник можно вписать окружность. Около всякого треугольника можно описать окружность. В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. В ромб всегда можно вписать окружность с центром в точке пересечения диагоналей, диаметр окружности равен высоте ромба. Если в трапецию вписана окружность, то сумма её оснований равна сумме боковых сторон. Если в равнобедренную трапецию вписана окружность, то её боковая сторона равна средней линии трапеции.

Около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны 180^0. Около прямоугольника можно всегда описать окружность с центром в точке пересечения диагоналей, диаметр окружности равен диагонали прямоугольника. Если около трапеции описана окружность, то трапеция равнобедренная (и наоборот).

Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник. Эта точка называется *центром* правильного многоугольника.

Если a_n — сторона правильного n-угольника, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, то $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = 2r\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = 2r$; $a_6 = R$, $a_6 = 2r\frac{\sqrt{3}}{3}$; $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, $a_n = 2r\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Задача 2. Около окружности описаны правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр треугольника и квадрата, если периметр шестиугольника равен 54 см.

Решение. Сторона шестиугольника равна $\frac{54}{6} = 9$. Так как окружность вписана в правильный шестиугольник, то её радиус $r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. Тогда сторона треугольника, описанного около этой окружности $a_3 = 2r\sqrt{3}$, $a_3 = \frac{2 \cdot 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 27$, периметр треугольника равен $27 \cdot 3 = 81$. Сторона квадрата, описанного около этой окружности, равна $a_4 = 2r$; $a_4 = 9\sqrt{3}$, а периметр квадрата равен $9\sqrt{3} \cdot 4 = 36\sqrt{3}$. *Ответ:* 81 см, $36\sqrt{3}$ см.

Задания для самостоятельного решения

1. Хорда окружности пересекает её диаметр под углом $30°$ и делится им на части 2 см и 6 см. Найдите расстояние от середины хорды до диаметра.

2. Хорда, равная 20 см, отсекает от окружности дугу в $90°$. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

3. Около окружности радиуса 12 см описан ромб. Найдите его высоту.

4. Около окружности радиуса 8 см описана равнобедренная трапеция с острым углом $30°$. Найдите боковую сторону трапеции.

5. Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2 : 3, расстояние между центрами окружностей равно 20 см. Найдите диаметр большей окружности.

6. Две окружности касаются внутренним образом. Радиусы окружностей относятся как 5 : 2. Найдите диаметр меньшей окружности, если расстояние между центрами равно 18 см.

7. Укажите номера неверных утверждений.

1. Если прямая перпендикулярна к радиусу окружности, то она является касательной к этой окружности.

2. Угол, вершина которого лежит на окружности, называется вписанным углом.

3. В любой треугольник можно вписать окружность.

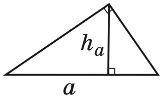
4. В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна $180°$.

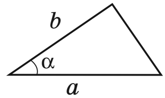
8. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

9. Найдите длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной $2\sqrt{3}$ см.

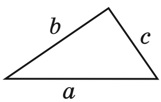
Площади плоских фигур

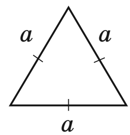
Площадь треугольника



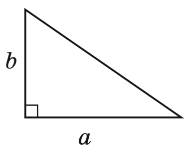


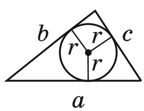
$S = \frac{1}{2} a h_a$; $S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$;

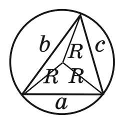




$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$





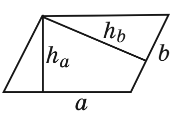


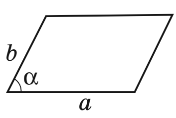
$S = \frac{ab}{2}$ $S = pr$; $S = \frac{abc}{4R}$.

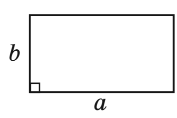
Рис. 30

r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности.

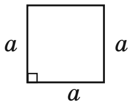
Площадь параллелограмма

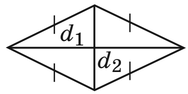






$S = ah_a$, $S = bh_b$ $S = ab\sin\alpha$ $S = ab$

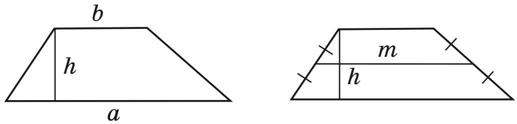




$S = a^2$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Рис. 31

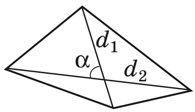
Площадь трапеции



$$S = \frac{a+b}{2}h \qquad\qquad S = mh$$

Рис. 32

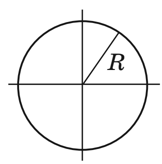
Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника



$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$

Рис. 33

Площадь круга



$$S = \pi \cdot R^2$$

Рис. 34

Задача 1. В треугольнике ABC на стороне $AB = 9$ см выбрана точка N так, что $AN = 2$ см. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle ACN = \angle ABC$.

Решение (рис. 35). 1. Треугольники CAN и NCB имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как длины их оснований: $\frac{S_{\Delta ACN}}{S_{\Delta NCB}} = \frac{2}{7}$.

2. Обозначим $S_{\triangle ACN} = 2k$, $S_{\triangle NCD} = 7k$, тогда $S_{\triangle ABC} = 9k$.

$S_{\triangle ACN} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot AC \cdot \sin A$, $2k = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = 2\sqrt{2}\,k$.

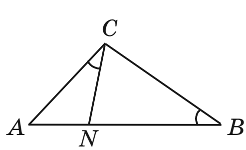


Рис. 35

3. $\triangle ACN \sim \triangle ABC$ (по двум углам); $\frac{AC}{AB} = \frac{AN}{AC}$; $\frac{2\sqrt{2}k}{9} = \frac{2}{2\sqrt{2}k}$; $4k^2 = 9$; $k = \frac{3}{2}$; $S_{\triangle ABC} = 9 \cdot \frac{3}{2} = 13{,}5$. *Ответ:* 13,5 см^2.

Задача 2. Определите площадь ромба, если радиус вписанной в него окружности равен 8 см, а меньшая диагональ $8\sqrt{5}$ см.

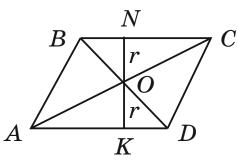


Рис. 36

Решение (рис. 36). 1. В прямоугольном треугольнике OKD ($\angle K = 90°$), $KD = \sqrt{OD^2 - OK^2}$, $KD = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 8^2} = \sqrt{16} = 4$.

2. В прямоугольном треугольнике OAD ($\angle O = 90°$), $OD^2 = AD \cdot KD$, $AD = \frac{OD^2}{KD}$, $AD = \frac{16 \cdot 5}{4} = 20$.

3. Высота ромба $KN = 2r$, $KN = 16$.

Площадь ромба $S = AD \cdot KN$, $S = 20 \cdot 16 = 320$. *Ответ:* 320 см^2.

Задания для самостоятельного решения

1. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC имеют длину 12 см и 5 см соответственно. На стороне AC взята точка E так, что $CE = 4$ см. Найдите площадь треугольника ABE.

2. Площадь прямоугольного треугольника равна 180 см^2. Найдите меньший катет, если отношение длин катетов равно 2 : 5.

3. Две стороны параллелограмма имеют длины 10 см и 8 см. Высота, проведённая к меньшей стороне, равна 15 см. Найдите высоту, проведённую к большей из данных сторон.

4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а его основание 12 см. Найдите площадь треугольника.

5. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной 8 см.

6. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 9 см и 16 см.

7. В треугольнике MNP известно, что $MP : MN = 2 : 1$. MK — биссектриса угла M. Площадь треугольника MPK равна 30 см^2. Найдите площадь треугольника MNK.

8. Стороны параллелограмма 15 и 20 см, а одна из высот равна 10 см. Найдите площадь параллелограмма.

9. Смежные стороны параллелограмма равны 13 см и 6 см, а его острый угол равен 30^0. Найдите площадь параллелограмма.

10. Найдите площадь ромба, если его диагонали имеют длину 12 см и 8 см.

11. В равнобедренной трапеции основания имеют длину 40 см и 30 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите площадь трапеции.

12. Найдите площадь кругового кольца, заключённого между двумя окружностями с общим центром и радиусами 5 см и 7 см.

13. Во сколько раз увеличится длина окружности, если радиус её увеличить в 3 раза?

14. Во сколько раз увеличится площадь круга, если радиус его увеличить в 4 раза?

15. В треугольнике проведены все средние линии. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного средними линиями?

16. В трапеции $ABCD$ длины оснований BC и AD относятся как $1 : 3$, O — точка пересечения диагоналей, площадь треугольника AOD равна 90 см^2. Найдите площадь треугольника BOC.

17. В треугольнике две стороны имеют длину 10 см и 13 см, косинус угла между ними равен 0,6. Найдите площадь треугольника.

18. Радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, относятся как $2 : 5$. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 см.

19. Найдите площадь правильного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 2 см.

20. Найдите площадь квадрата, если радиус описанной около него окружности равен 3 см.

21. Найдите площадь круга, вписанного в квадрат со стороной 6 см.

Ответы

Угловые соотношения в плоских фигурах

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	45°	0°	40°	90°	15°	120°	50°	5	10

№ задания	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	а)70° , б) 115°	135°	72°	120°	20°	30°	А Б В 3 1 2

Метрические соотношения в плоских фигурах

Треугольники

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	9	23	45	15	26	13	4	2	104°

№ задания	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ответ	9	21	14	3,4	60°	46	30	36	1:25	2; 3

№ задания	20	21	22	23
Ответ	$\sqrt{2}: 1$	$\sqrt{7}$	15	а) 0; б) $\sqrt{3}$; в) −0,5

Четырёхугольники

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	14	20	52	21	10	1	60°	8

№ задания	9	10	11	12	14	15	16	17
Ответ	60°	8	70	50	А Б В 4 2 1	3; 4	10	48; 24

Окружность

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	1	10	24	32	24	24	1; 2	8	4π

Площади плоских фигур

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	20	12	12	48	$16\sqrt{3}$	150	15	150 или 200	39	48

№ задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Ответ	420	24π	3	16	0,25	10	52	32; 80	$12\sqrt{3}$	18	9π

ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ТЕМА «Геометрия»

Издательства «**АСТ**» и «**Астрель**» предлагают новую серию учебных пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации «**Азбука ГИА**».

Содержание и структура пособий полностью соответствуют официальным документам ГИА, разработанным **Федеральным институтом педагогических измерений** (ФИПИ).

Каждая книга серии посвящена одной или нескольким крупным предметным темам, которые выносятся на экзамен. Рассматриваются все задания на эти темы частей 1 и 2 — базового, повышенного и высокого уровней сложности. Приводятся тесты на проверку различных умений и навыков.

ВНИМАНИЕ !

Издательство «Астрель», подготовившее эти книги, входит в официальный перечень издательств, которым Министерство образования и науки Российской Федерации дало право выпускать учебные пособия для общеобразовательных школ, имеющих государственную аккредитацию (Приказ № 729 от 14.12.2009 г.).

ISBN 978-5-271-39072-2

9 785271 390722

www.elkniga.ru